Resolución de problemas autoadjuntos sobre redes finitas[1]

E. Bendito, A. Carmona, A.M. Encinas[2]

Resumen

Para el operador $L_q u = Lu + qu$, donde L es el Laplaciano combinatorio asociado a una red finita y q es una función no negativa, los autores obtuvieron las funciones de Green en términos de medidas de equilibrio aplicando Técnicas de Teoría del Potencial considerando el operador como un núcleo. Aquí desarrollamos estas técnicas cuando L_q es un Laplaciano normalizado (mediante una función positiva arbitraria). El caso en el que L es el Laplaciano combinatorio y q es una función con signo se obtienen como un subproducto.

1 Introducción

Sea $\Gamma = (V, E, c)$ una red finita, donde V es el conjunto de vértices, E es el conjunto de ramas y $c : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ es la función de conductividad de la red, i.e., $c(x,y) > 0$ si $x \sim y$, $c(x,y) = 0$ si $x \not\sim y$. Supondremos que la red es conexa, es decir, para todo par de vértices existe un camino que los une. Un área de trabajo de gran interés es el análisis y la solución de problemas de contorno en redes finitas. El operador con el que comúnmente se describen los problemas de contorno es el operador Laplaciano aunque esta denominación no está unívocamente determinada y engloba a distintos tipos de operadores relacionados entre sí, concretamente los denominados Laplaciano probabilístico, Laplaciano combinatorio y Laplaciano normalizado. El primero de ellos, clásicamente utilizado en el ámbito de cadenas de Markov, no es simétrico, por lo que para aplicarle técnicas en las que la simetría resulta ser una propiedad determinante debe ser transformado en uno de los otros dos Laplacianos. Para fijar ideas explicitemos la expresión de los Laplacianos combinatorio y normalizado.

Si $\mathcal{C}(V)$ denota el conjunto de funciones definidas en V, el *Laplaciano combinatorio* de Γ es el operador $L : \mathcal{C}(V) \longrightarrow \mathcal{C}(V)$ que asigna a cada función $u \in \mathcal{C}(V)$ la función

$$\begin{aligned} L(u)(x) &= \sum_{y \in V} c(x,y)\big(u(x) - u(y)\big) \\ &= \int_V c(x,y)\big(u(x) - u(y)\big)dy. \end{aligned}$$

Si $n = |V|$, el espacio $\mathcal{C}(V)$ está identificado con $\mathbb{R}^n$ y por tanto el operador L está a su vez identificado con la matriz de orden n cuyas entradas son $L_{xy} = -c(x,y)$ y $L_{xx} = \int_V c(x,y)dy = c(x)$. Por otra parte, el *Laplaciano normalizado* de Γ es el operador $\mathcal{L} : \mathcal{C}(V) \longrightarrow \mathcal{C}(V)$ que asigna a cada $u \in \mathcal{C}(V)$ la función

$$\mathcal{L}(u)(x) = \frac{1}{\sqrt{c(x)}} \int_V c(x,y) \left(\frac{u(x)}{\sqrt{c(x)}} - \frac{u(y)}{\sqrt{c(y)}} \right) dy.$$

El operador $\mathcal{L}$ está a su vez identificado con la matriz de orden n cuyas entradas son $\mathcal{L}_{xx} = 1$ y $\mathcal{L}_{xy} = -\dfrac{c(x,y)}{\sqrt{c(x)}\sqrt{c(y)}}$.

A continuación describiremos los problemas de contorno objeto de nuestro estudio, tanto para el Laplaciano combinatorio como para el normalizado, que denotaremos indistintamente por Δ.

Si F es un subconjunto no vacío de V, $\delta(F) = \{x \in F^c : x \sim y \text{ para algún } y \in F\}$ y $\bar{F} = F \cup \delta(F)$ denotan la *frontera de vértices* y la *adherencia* de F, respectiamente, mientras que $\mathcal{C}(F)$ denota el conjunto de funciones de $\mathcal{C}(V)$ nulas fuera de F. Entonces, fijada $q \in \mathcal{C}(F)$, planteamos el problema de contorno consistente en, dadas las funciones $f \in$

[1]Trabajo parcialmente subvencionado por el Ministerio de Ciencia y Tecnología mediante el proyecto BFM2000-1063 y por la ETSECCPB

[2]Dpto. de Matemática Aplicada III. Universitat Politècnica de Catalunya. E-mail: angeles.carmona@upc.es

$\mathcal{C}(F)$, $g \in \mathcal{C}(\delta(F))$ encontrar $u \in \mathcal{C}(\bar{F})$ tal que

$$\left.\begin{aligned}\Delta(u)(x) + q(x)u(x) = f(x),\ \text{ si } x \in F,\\ u(x) = g(x),\ \text{ si } x \in \delta(F).\end{aligned}\right\}[\text{PC}]$$

Cuando $F \neq V$ este problema se denomina *problema de Dirichlet*, mientras que si $F = V$ se denomina *ecuación de Poisson*.

El problema [PC] puede interpretarse en términos de la resolución del sistema lineal $Au = b$,

$$A = \begin{pmatrix} \Delta_F + qI_F & \Delta_{F\times\delta(F)} \\ 0 & I_{\delta(F)} \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad b = \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}.$$

Si $q \in \mathcal{C}^+(F)$, es decir si q es no negativa y $\Delta = L$, A es una M-matriz simétrica, irreducible y diagonalmente dominante, y en particular semidefinida positiva, [5]. Cuando $\Delta = \mathcal{L}$, A es una M-matriz simétrica, irreducible y semidefinida positiva, pero en general no es diagonalmente dominante. En cualquier caso, si F es propio o q no es idénticamente nula, A es invertible y por tanto el problema [PC] tiene una única solución.

Por otra parte, todo operador lineal simétrico define una forma cuadrática. Concretamente, para el operador $\Delta + q$ la forma cuadrática está dada por

$$\mathcal{E}(u) = \frac{1}{2}\int_{V\times V} \Delta_{xy}\big(u(x) - u(y)\big)^2 dxdy + \int_V q(x)u^2(x)dx.$$

Si la matriz simétrica asociada al operador es una M-matriz diagonalmente dominante, la forma cuadrática es una *forma de Dirichlet* y entonces las técnicas habituales desarrolladas en Teoría del Potencial en este contexto pueden ser utilizadas para el análisis de los problemas de contorno. Sin embargo si q es una función con signo o Δ es el Laplaciano normalizado la forma cuadrática asociada al operador no es una forma de Dirichlet.

En trabajos previos, (ver por ejemplo [3]), los autores han analizado el problema [PC] para el Laplaciano combinatorio y $q \in \mathcal{C}^+(F)$ utilizando técnicas de Teoría del Potencial con núcleo. Las técnicas empleadas son independientes de las de la Teoría de Formas de Dirichlet y están basadas en el hecho de que como todo operador lineal en una red finita tiene una matriz asociada, ésta puede considerarse como un núcleo. Las características de este núcleo han permitido verificar propiedades suficientes, *principio del máximo* y *principio energía*, para que el *problema de equilibrio* tenga solución para cualquier subconjunto propio del conjunto de vértices o bien sobre el conjunto V si q no es idénticamente nula. Entonces, la solución del problema [PC] se expresa de forma elemental en términos de las soluciones de problemas de equilibrio adecuados.

En este trabajo abordamos el estudio del problema [PC] en el caso en el que la matriz asociada al sistema es una M-matriz simétrica, irreducible y semidefinida positiva. Para ello extendemos los principios del máximo y de energía y por tanto el principio de equilibrio a los núcleos determinados por este tipo de matrices. En particular, introduciremos técnicas de Teoría del Potencial con núcleo en problemas donde no son aplicables técnicas de la Teoría de Formas de Dirichlet, concretamente aquellos en los que q es una función con signo o el Laplaciano es el normalizado.

2 Monotonía del operador Laplaciano

Los desarrollos de esta sección toman como base el Laplaciano combinatorio y generalizan las técnicas mencionadas anteriormente. Así, si L es el Laplaciano combinatorio denotaremos por L_q al operador en diferencias $L + q$.

Consideremos $\sigma \in \mathcal{C}(V)$ tal que $\sigma(x) > 0$ para cada $x \in V$. Entonces para cada $u \in \mathcal{C}(V)$ y para cada $x, y \in V$ se satisface que

$$\sigma(x)\,\sigma(y)\,\left(\frac{u(x)}{\sigma(x)} - \frac{u(y)}{\sigma(y)}\right) = \sigma(x)\,\big(u(x) - u(y)\big) - \big(\sigma(x) - \sigma(y)\big)\,u(x).$$

Por tanto, si consideramos la función $q_\sigma = -\dfrac{1}{\sigma}\,L\sigma$, entonces para cada $u \in \mathcal{C}(V)$ y cada $x \in V$, sumando y restando q_σ a la expresión de $L_q(u)(x)$ obtenemos

$$L_q(u)(x) = \big(q(x) - q_\sigma(x)\big)\,u(x) + \frac{1}{\sigma(x)}\int_V c(x,y)\sigma(x)\sigma(y)\left(\frac{u(x)}{\sigma(x)} - \frac{u(y)}{\sigma(y)}\right) dy. \tag{1}$$

Obsérvese que $L_q(\sigma) = (q - q_\sigma)\sigma$ lo que implica que $L_q(\sigma) = 0$ cuando $q = q_\sigma$. Además, $q_\sigma = 0$ sii σ es constante y cuando σ no es constante, necesariamente q_σ cambia de signo en V pues $\displaystyle\int_V \sigma\, q_\sigma = -\int_V L\sigma = 0$.

En toda la sección, supondremos que se satisfacen la siguiente hipótesis: *Existe $\sigma \in \mathcal{C}(V)$ tal que $\sigma > 0$ y $q \geq q_\sigma$.*

Cuando $q = 0$, es decir cuando L_q coincide con L, se satisface la hipótesis con $\sigma = 1$ y no existe ninguna función positiva no constante tal que $q \geq q_\sigma$.

A continuación analizaremos cuestiones de existencia y de unicidad de solución del problema [PC]. Cuando $F \neq V$, el problema [PC] es equivalente al problema semihomogéneo con dato $f - L_q(g)$, es decir al problema

$$\left.\begin{aligned} L_q(u)(x) = f(x) - L_q(g)(x),\ &\text{si } x \in F,\\ u(x) = 0,\ &\text{si } x \in \delta(F). \end{aligned}\right\}[\mathrm{PC}]_0$$

en el sentido de que u es solución de este problema sii $u + g$ es solución de [PC].

Proposición 2.1 *Supongamos que F es un subconjunto no vacío de V y que no se satisfacen simultáneamente que $F = V$ y $q = q_\sigma$. Si $u \in \mathcal{C}(V)$ es tal que $L_q(u) \geq 0$ sobre F y $u \geq 0$ sobre F^c, entonces $u \in \mathcal{C}^+(V)$.*

Demostración. Como por hipótesis, $u \geq 0$ sobre F^c, basta demostrar que $u(z) \geq 0$ para cada $z \in F$. Si $v = \dfrac{u}{\sigma}$, para concluir que $u \in \mathcal{C}^+(F)$, basta demostrar que $v \in \mathcal{C}^+(F)$ y para ello, si $x \in F$ es tal que $v(x) = \min\limits_{z\in F}\{v(z)\}$ será suficiente demostrar que $v(x) \geq 0$, o de forma equivalente, que si $v(x) \leq 0$, entonces $v(x) = 0$.

Supongamos pues que $v(x) \leq 0$. Entonces $v(x) \leq v(y)$ para cada $y \in V$ y por tanto de la expresión (1), deducimos que

$$\begin{aligned} 0 \leq L_q(u)(x) &= \big(q(x) - q_\sigma(x)\big)\, \sigma(x)\, v(x)\\ &+ \frac{1}{\sigma(x)} \int_V c(x,y)\sigma(x)\sigma(y)\big(v(x) - v(y)\big)dy \leq 0, \end{aligned}$$

lo que implica que $v(x) = v(y)$ para cada $y \in F$ tal que $c(x,y) \neq 0$. Desde luego, si $c(x,y) > 0$ para algún $y \in F^c$, como $v(y) \geq 0$, necesariamente $v(x) = 0$.

Si $F \neq V$ y consideramos $y \in F^c$, como V es conexo y c no negativa, existen $n \in \mathbb{N}^*$ y $x_0, \cdots, x_n \in V$, tales que $x_0 = x$, $x_n = y$ y además $c(x_{j-1}, x_j) > 0$ para cada $j = 1, \cdots, n$. Sean ahora $J = \{j = 1, \cdots, n : x_j \notin F\}$ y j_0 el primer elemento de J. Si $j_0 = 1$, el razonamiento anterior prueba que $v(x) = 0$, mientras que si $j_0 > 1$, el mismo razonamiento concluye que x_1 es un punto de mínimo de v sobre F, así que podemos repitir el razonamiento anterior tomando el punto x_1 en lugar de x_0. Un simple razonamiento inductivo concluye que $v(x_0) = \cdots = v(x_{j_0}) = 0$.

Si $F = V$, un razonamiento análogo al anterior concluye que v debe ser constante sobre F. Por tanto, $0 = L_q(u) = (q - q_\sigma)\, u$ y como $q \neq q_\sigma$, necesariamente $u = 0$. ∎

Cuando $q = q_\sigma$, aplicando un razonamiento análogo al de la demostración anterior o bien teniendo en cuenta que, en este caso, para cada $u \in \mathcal{C}(V)$ necesariamente $L_q(u)$ debe cambiar de signo, resulta que la condición $L_q(u) \geq 0$ sobre V es equivalente a que $L_q(u) = 0$ sobre V y por tanto a que $u = a\,\sigma$ con $a \in \mathbb{R}$.

Corolario 2.2 *Sea F un subconjunto no vacío de V y supongamos que no se satisface simultáneamente que $F = V$ y que $q = q_\sigma$. Entonces, para cada $f \in \mathcal{C}(F)$ existe una única $u \in \mathcal{C}(F)$ tal que $L_q(u) = f$ sobre F. Además, si $f \in \mathcal{C}^+(F)$, entonces $u \in \mathcal{C}^+(F)$ y $\mathsf{sop}(f) \subset \mathsf{sop}(u)$.*

Corolario 2.3 (Principio de condensadores). *Sean F es subconjunto propio de V, $\{A, B\}$ una partición de $\delta(F)$ y $u \in \mathcal{C}(V)$ la única solución del problema de contorno*

$$\left.\begin{aligned} L_q(u)(x) &= 0, && \text{si } x \in F,\\ u(x) &= \sigma(x), && \text{si } x \in A,\\ u(x) &= 0, && \text{si } x \in B. \end{aligned}\right\}$$

Entonces, u satisface que $0 \leq u \leq \sigma$ sobre V, $L_q(u) \geq 0$ sobre A y $L_q(u) \leq 0$ sobre B.

La propiedad de monotonía del operador L_q a la que hace referencia la Proposición 2.1, puede interpretarse como un *principio del mínimo* para el operador en diferencias L_q, que es una versión discreta del conocido principio del mínimo para operadores elípticos de segundo orden. De hecho, mostraremos a continuación que dicha propiedad corresponde realmente a un *principio fuerte del mínimo.*

Proposición 2.4 *Supongamos que $q = q_\sigma$ y consideremos F un subconjunto propio. Si $u \in \mathcal{C}(\bar{F})$ es tal que $L_q(u) \geq 0$ sobre F, entonces*

$$\min_{x\in\delta(F)} \left\{\frac{u(x)}{\sigma(x)}\right\} \leq \min_{x\in F} \left\{\frac{u(x)}{\sigma(x)}\right\}$$

y se satisface la igualdad sii u coincide sobre cada componente conexa de $\bar{F}$ con un múltiplo de σ.

Demostración. Consideremos el escalar $m = \min\limits_{x\in\delta(F)} \left\{\frac{u(x)}{\sigma(x)}\right\}$ y la función $w = u - m\,\sigma_{|_{\bar{F}}}$. Desde luego, $L_q(w) = L_q(u) \geq 0$ sobre F y $w \geq 0$ sobre F^c, lo que en virtud de la Proposición 2.1, implica que $w \geq 0$ sobre V, así que $m = \min\limits_{x\in\bar{F}} \left\{\frac{u(x)}{\sigma(x)}\right\}$.

Si consideramos la función $v = \frac{w}{\sigma} = \frac{u}{\sigma} - m$, entonces $v \geq 0$ sobre $\bar{F}$ y si $x^* \in \bar{F}$ es tal que $m = \frac{u(x^*)}{\sigma(x^*)}$, resulta que $v(x^*) = 0$. Repitiendo el razonamiento de la Proposición 2.1, necesariamente $v(z) = 0$ para cada $z \in \bar{F}$ tal que $c(x^*, z) > 0$. Nuevamente un argumento de conexión concluye que $v = 0$ sobre cada componente conexa de F y por tanto sobre cada componente conexa de $\bar{F}$. ∎

Como es habitual, el anterior principio del mínimo es equivalente a un *principio del máximo* para L_q, que es nuevamente una versión discreta del principio del máximo para operadores elípticos de segundo orden. El siguiente resultado es pues un análogo discreto de los principos del máximo y del mínimo para funciones tales que $L_q(u) = 0$.

Corolario 2.5 *Supongamos que $q = q_\sigma$ y consideremos F un subconjunto propio. Si $u \in \mathcal{C}(\bar{F})$ es tal que $L_q(u) = 0$ sobre F, entonces para cada $x \in F$ se tiene que*

$$\min_{z\in\delta(F)} \left\{\frac{u(z)}{\sigma(z)}\right\} \leq \frac{u(x)}{\sigma(x)} \leq \max_{z\in\delta(F)} \left\{\frac{u(z)}{\sigma(z)}\right\}$$

y se satisface cualquiera de las igualdades sii u coincide con un múltiplo de σ sobre cada componente conexa de $\bar{F}$.

Debe observarse que los anteriores principios del mínimo o del máximo son más finos que sus análogos continuos: mientras que en el caso continuo debe exigirse que el término de orden cero sea nulo, la condición en el caso discreto es que $q = q_\sigma$. En particular, si $\bar{F} \neq V$, no existe, *a priori*, inconveniente para que q_σ sea no positiva en $\bar{F}$, lo que implicaría que el principio del mínimo (o el del máximo) discreto se satisface contando con la presencia de un término de orden cero no positivo.

Finalizaremos esta sección describiendo las condiciones de existencia y unicidad de solución para la ecuación de Poisson en el caso $q = q_\sigma$.

Proposición 2.6 *Si se satisface simultáneamente que $F = V$ y que $q = q_\sigma$, entonces* [PC] *tiene solución sii $\int_V f(x)\sigma(x)dx = 0$. Además existe una única solución u que satisface $\int_V u(x)\sigma(x)dx = 0$.*

3 El núcleo asociado a los operadores Laplacianos

En esta sección describiremos las relaciones entre el problema de contorno $[\mathrm{PC}]_0$ y la Teoría del Potencial respecto del núcleo Laplaciano. Para ello introducimos en primer lugar algunas notaciones y definiciones.

En toda la sección $\mathcal{M}(V)$ denotará el espacio de las medidas de Radon sobre V que está identificado con $\mathcal{C}(V)$ y por tanto con $\mathbb{R}^n$. Si $\tau \in \mathcal{M}(V)$, denominaremos *soporte de* τ y *masa de* τ al conjunto y al número real dados respectivamente por

$$\mathsf{sop}(\tau) = \{x \in V : \tau(x) \neq 0\},$$
$$|\tau| = \int_V d\tau = \sum_{x\in V} \tau(x).$$

Si F es un subconjunto no vacío de V, denotaremos por $\mathcal{M}^+(F)$ al conjunto de medidas positivas cuyo soporte está contenido en F y por $\mathcal{M}^1(F)$ al conjunto $\Big\{\tau \in \mathcal{M}^+(F) : |\tau| = 1\Big\}$.

Denominaremos *núcleo sobre* V a cualquier función $\mathcal{K} : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ que sea simétrica, es decir tal que $\mathcal{K}(x,y) = \mathcal{K}(y,x)$ para cada $x, y \in V$. Dados $\tau \in \mathcal{M}(V)$ y $\mathcal{K}$ un núcleo sobre V, denominaremos *potencial y energía de τ respecto de $\mathcal{K}$*, a la función y al número real dados respectivamente por

$$\mathcal{U}^\tau(x) = \int_V \mathcal{K}(x,y)d\tau(y), \;\; x \in V$$
$$\mathcal{I}(\tau) = \int_V \mathcal{U}^\tau(x)d\tau(x).$$

Sean $\mathcal{K}$ un núcleo sobre V y F un subconjunto no vacío de V. Diremos que $\mathcal{K}$ satisface el *principio del máximo de Frostman*, o simplemente el *principio del máximo*, si

$$\max_{x\in V}\{\mathcal{U}^\tau(x)\} = \max_{x\in \mathsf{sop}(\tau)}\{\mathcal{U}^\tau(x)\},\ \tau\in\mathcal{M}^+(V).$$

Diremos que $\mathcal{K}$ satisface el *principio de energía sobre F* si $\mathcal{I}(\tau_1-\tau_2)\geq 0$, para cada $\tau_1,\tau_2\in\mathcal{M}^1(V)$ y se satisface la igualdad sii $\tau_1=\tau_2$.

El núcleo que consideraremos en este trabajo es el propio operador en diferencias L_q ya que éste está identificado con su matriz asociada y por tanto podemos considerarlo también como un núcleo sobre el espacio de vértices de la red. Además, como no hay lugar a confusión, omitiremos la expresión *respecto de L_q* en todas las nociones relativas a la Teoría del Potencial desarrollada para L_q.

Proposición 3.1 *El núcleo L_q es simétrico y para cada $x,y\in V$ está dado por $L_q(x,y)=-c(x,y)$, si $x\neq y$ y por $L_q(x,y)=\dfrac{1}{\sigma(x)}\displaystyle\int_V c(x,z)\sigma(z)dz+q(x)-q_\sigma(x)$, si $x=y$. Además, para cada $\gamma\in\mathcal{M}(V)$, el potencial de γ coincide con $L_q(\gamma)$ y la energía de γ está dada por*

$$\mathcal{I}(\gamma)=\frac{1}{2}\int_{V\times V}c(x,y)\sigma(x)\sigma(y)\left(\frac{\gamma(y)}{\sigma(y)}-\frac{\gamma(x)}{\sigma(x)}\right)^2 dxdy + \int_V\big(q(x)-q_\sigma(x)\big)\,\gamma^2(x)\,dx.$$

Obsérvese que como la matriz L_q es semidefinida positiva y sus elementos no diagonales son negativos, entonces L_q es una M-matriz simétrica, ver [2]. A continuación vemos que este tipo de núcleos verifican los principios del máximo y de energía.

Proposición 3.2 *El núcleo L_q satisface los principios de energía y del máximo.*

Demostración. Después de la expresión de $\mathcal{I}(\gamma)$ obtenida en la proposición anterior, es claro que $\mathcal{I}$ es semidefinida positiva. Por otra parte, $\mathcal{I}(\gamma)=0$ sii $\gamma=a\,\sigma$ con $a\in\mathbb{R}$ y si además $\displaystyle\int_V d\gamma=\int_V\gamma(x)\,dx=0$, necesariamente $a=0$. Por tanto, $\mathcal{I}$ es definida positiva sobre el subespacio $\left\{\gamma\in\mathcal{M}(V):\displaystyle\int_V d\gamma=0\right\}$, es decir, L_q satisface el principio de energía.

Consideremos ahora $\gamma\in\mathcal{M}^+(V)$ y $F=\mathsf{sop}(\gamma)$. Como para cada $x\in V$ se verifica que

$$\mathcal{U}^\gamma(x)=\frac{1}{\sigma(x)}\int_V c(x,z)\sigma(x)\sigma(z)\left(\frac{\gamma(x)}{\sigma(x)}-\frac{\gamma(z)}{\sigma(z)}\right)dz + \Big(q(x)-q_\sigma(x)\Big)\gamma(x),$$

y las funciones γ, c y σ son no negativas, resulta que $\mathcal{U}^\gamma(x)\leq 0$ si $x\notin F$. Si tomamos $x\in F$ tal que $\dfrac{\gamma(x)}{\sigma(x)}=\max\limits_{z\in F}\left\{\dfrac{\gamma(z)}{\sigma(z)}\right\}$, como también $q\geq q_\sigma$, entonces $\mathcal{U}^\gamma(x)\geq 0$ y en definitiva, obtenemos que $\max\limits_{z\in V}\{\mathcal{U}^\gamma(z)\}=\max\limits_{z\in F}\{\mathcal{U}^\gamma(z)\}$, así que L_q satisface el principio del máximo. ∎

Corolario 3.3 *Sea F un subconjunto no vacío de V y supongamos que no se satisface simultáneamente que $F=V$ y que $q=q_\sigma$. Entonces, existe una única medida positiva γ^F tal que $\mathsf{sop}(\gamma^F)=F$ y $L_q(\gamma^F)=1$ sobre F.*

Si F un subconjunto no vacío de V y no se satisface simultáneamente que $F=V$ y que $q=q_\sigma$, denominaremos *medida de equilibrio de F* a la única medida positiva γ^F que satisface que $\mathsf{sop}(\gamma^F)=F$ y que $L_q(\gamma^F)=1$ sobre F.

Designaremos por γ^x y por γ^{xy} a las medidas de equilibrio de los subconjuntos $F=V-\{x\}$ y $V-\{x,y\}$ con $x\neq y$, respectivamente. Cuando $q=q_\sigma$ es sencillo comprobar que se satisface la siguiente identidad

$$\gamma^{xy}=\frac{\sigma(x)\gamma^x(y)\gamma^y+\sigma(y)\gamma^y(x)\gamma^x-\gamma^x(y)\gamma^y(x)\sigma}{\sigma(x)\gamma^x(y)+\sigma(y)\gamma^y(x)}.$$

Si consideramos la función $\rho: V\times V\longrightarrow\mathbb{R}$ definida como

$$\rho(x,y)=\sigma(x)\,\gamma^x(y)+\sigma(y)\,\gamma^y(x);\qquad x,y\in V,$$

es claro que es simétrica, que se anula en la diagonal de V y que es estrictamente positiva fuera de ella. En el contexto de redes eléctricas resistivas, es decir cuando σ es constante, el valor $\rho(x,y)\left(\displaystyle\int_V\sigma(z)\,dz\right)^{-1}$ coincide con la *resistencia efectiva entre los vértices x e y*. La expresión dada aquí generaliza la obtenida en [4]. Por otra parte, el siguiente resultado es también una generalización del denominado *Teorema de Foster*, del cual se han dado diferentes tipos de demostraciones (ver por ejemplo, [6] y [7]).

Proposición 3.4 *Si $q = q_\sigma$, entonces se satisface que*

$$\int_{V\times V} \rho(x,y)c(x,y)dxdy = 2(|V|-1)\int_V \sigma(z)dz.$$

Aunque el resultado del Corolario 3.3 se ha obtenido mediante técnicas de la Teoría del Potencial, también es consecuencia de la aplicación de la Proposición 2.1 a la función $f = 1_{|F}$. Sin embargo, es importante resaltar que la aplicación de la Teoría del Potencial desarrollada en la sección precedente asegura que si $F \subset V$ satisface las condiciones del corolario anterior, su medida de equilibrio puede obtenerse mediante algoritmos de Programación Cuadrática y/o de Programación Lineal. Concretamente, si $n = |F|$, $F = \{x_1, \cdots, x_n\}$, y consideramos para cada $i, j = 1, \cdots, n$ el escalar $c_{ij} = c(x_i, x_j)$ y para cada $j = 1, \cdots, n$ los escalares σ_j, q_j, p_j tales que $\sigma = \sum\limits_{j=1}^n \sigma_j\, \varepsilon_{x_j}$, $q - q_\sigma = \sum\limits_{j=1}^n q_j\, \varepsilon_{x_j}$ y $p_i = \sum\limits_{j=1}^n c_{ij}\, \sigma_j$, entonces $\gamma^F = \dfrac{1}{a_0}\sum\limits_{j=1}^n a_j\, \varepsilon_{x_j}$, donde $(a_1, \cdots, a_n)$ es la solución del problema de Programación Cuadrática convexa

$$\begin{array}{l} \quad\quad \min \left\{ \displaystyle\sum_{i=1}^n \frac{1}{\sigma_i}\Big(\sigma_i\, q_i + p_i\Big) z_i^2 - \sum_{i,j=1}^n c_{ij}\, z_i\, z_j \right\} \\ z_j \geq 0, j = 1, \ldots, n \\ z_1 + \cdots + z_n = 1 \end{array}$$

y a_0 es el valor de tal mínimo. Además, $(a_0, a_1, \cdots, a_n)$ es también solución del problema de Programación Lineal

$$\begin{array}{c} \min \quad \{z_0\} \\ \displaystyle\sum_{j=1}^n \sigma_1\, c_{1j}\, z_j - (\sigma_1\, q_1 + p_1)\, z_1 + \sigma_1\, z_0 \geq 0 \\ \vdots \\ \displaystyle\sum_{j=1}^n \sigma_n\, c_{nj}\, z_j - (\sigma_n\, q_n + p_n)\, z_n + \sigma_n\, z_0 \geq 0 \\ z_j \geq 0, j = 1, \ldots, n \\ z_1 + \cdots + z_n = 1 \end{array}$$

4 Funciones de Green

La utilización de las medidas de equilibrio permite obtener una expresión explícita de la función de Green de cada subconjunto no vacío F, siempre y cuando no se satisfaga simultáneamente que $F = V$ y $q = q_\sigma$.

Proposición 4.1 *Si F es un subconjunto no vacío de V y no se satisface simultáneamente que $F = V$ y $q = q_\sigma$, entonces la función de Green de F está dada por la expresión*

$$G^F(x,y) = \frac{\gamma^F(x) - \gamma^{F-\{y\}}(x)}{1 + \displaystyle\int_V c(y,z)\gamma^{F-\{y\}}(z)dz},$$

para cada $x, y \in V$.

Demostración. La función de Green de F, es decir la función de Green del problema [PC] está caracterizada por satisfacer, para cada $y \in F$, las ecuaciones

$$\left.\begin{array}{rll} L_q(G_y^F) = & \varepsilon_y, & \text{sobre } F \\ G_y^F = & 0, & \text{sobre } \delta(F), \end{array}\right\}.$$

Consideremos $K \in \mathcal{C}(V \times F)$ el núcleo dado por $K(x,y) = \gamma^F(x) - \gamma^{F-\{y\}}(x)$. Fijado $y \in F$, es claro que $K_y = 0$ sobre F^c, puesto que $\mathsf{sop}(\gamma^F), \mathsf{sop}(\gamma^{F-\{y\}}) \subset F$. Además, se satisface que

$$\begin{aligned} L_q(K_y)(x) &= L_q(\gamma^F)(x) - L_q(\gamma^{F-\{y\}})(x) \\ &= \begin{cases} 0, & \text{si } x \neq y, \\ 1 - L_q(\gamma^{F-\{y\}})(y), & \text{si } x = y \end{cases} \end{aligned}$$

y basta ahora tener en cuenta que $L_q(\gamma^{F-\{y\}})(y) = -\displaystyle\int_V c(y,z)\gamma^{F-\{y\}}(z)dz.$ ∎

La expresión de la función de Green del conjunto F obtenida en la proposición anterior es análoga a la que aparece en [3], que corresponde al caso $q \in \mathcal{C}^+(F)$ y σ constante. En ese trabajo, las medidas de equilibrio de los conjuntos $V - \{y\}$ con $y \in F$ también permitieron obtener directamente una expresión de la función de Green cuando $F = V$ y $L_q = L$. El concepto de función de Green para la ecuación de Poisson hace referencia a cualquier inverso por la derecha del operador L_q. En particular, el siguiente resultado presenta la expresión de la única función de Green para la ecuación de Poisson ortogonal a σ.

Proposición 4.2 *La función de Green ortogonal para la ecuación de Poisson asociada al operador L está dada por la expresión*

$$G(x,y) = |V|^{-2}\Big(|\gamma^y| - |V|\,\gamma^y(x)\Big), \quad x, y \in V.$$

En particular, para cada $y \in V$, $G_y(x) < G_y(y)$ para cada $x \in V$ con $x \neq y$.

A continuación generalizamos este resultado al caso en el que σ es una función positiva.

Proposición 4.3 *Supongamos que $q = q_\sigma$ y sean $\alpha = \left(\int_V \sigma(z)\,dz\right)^{-1}\left(\int_V \sigma^2(z)dz\right)^{-1}$ y $\beta = \left(\int_V \sigma(z)\,dz\right)^{-1}\left(\int_V \sigma^2(z)dz\right)^{-2}$. Entonces, la función de Green de V está dada por la expresión*

$$\begin{aligned} G(x,y) &= \alpha\,\sigma(y)\int_V \sigma^2(z)\,\gamma^z(x)\,dz \\ &-\beta\,\sigma(x)\,\sigma(y)\int_{V\times V}\sigma^2(z)\,\sigma(w)\,\gamma^z(w)\,dz\,dw \\ &+\alpha\sigma(x)\sigma(y)\int_V \sigma(z)\gamma^y(z)dz - \frac{\sigma(y)\gamma^y(x)}{\displaystyle\int_V \sigma(z)dz} \end{aligned}$$

En particular, para cada $y \in V$, se satisface que $G_y \le G_y(y)\,\dfrac{\sigma}{\sigma(y)}$.

Referencias

[1] M.T. Barlow. *Diffusions on fractals. In: Lectures on Probability Theory and statistics, Ecole d'Éte de Probabilités de Saint-Flour XXV-1995.* Lect. Notes Math. vol. 1690 pp.1-121. Springer-Verlag, 1998.

[2] A. Berman y R.J. Plemons. *Nonnegative matrices in the mathematical sciences.* Classics in Applied Mathematics. vol. 9. SIAM, 1994.

[3] E. Bendito, A. Carmona y A.M. Encinas. *Solving boundary value problems on networks using equilbrium measures.* J. Funct. Anal. vol. 171 pp.155-176. 2000.

[4] E. Bendito, A. Carmona y A.M. Encinas. *Solving Dirichlet and Poisson problems on graphs by means of equilbrium measures.* sometido en Europ. J. Combinatorics. 2001.

[5] M. Fiedler. *Some characterizations of symmetric inverse M-matrices.* Linear Algebra Appl. vol. 275/276 pp.179-187. 1998.

[6] S. Ponzio. *The combinatorics of effective resistances and resistive inverses.* Inform. and Comput. vol. 147 pp.209-223. 1998.

[7] P. Tetali. *An extension of Foster's network theorem.* Combin. Probab. Comput. vol. 3 pp.421-427. 1994.